في الرياضيات

التفوق عنواننا.. التميز هدفنا

الإحصاء

مستر/محمود حمدان

أستاذ الرياضيات

ت: 01153797200

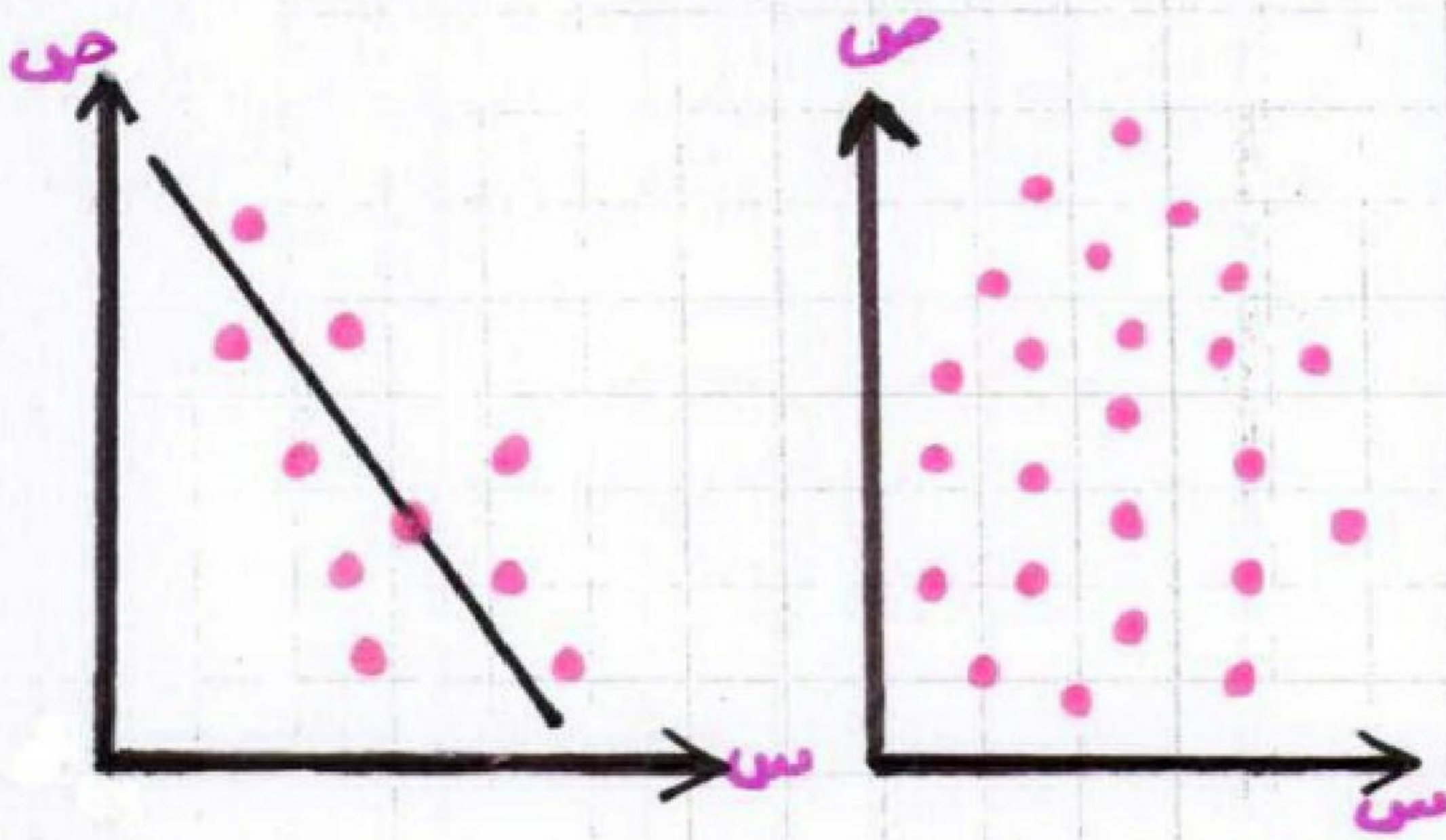
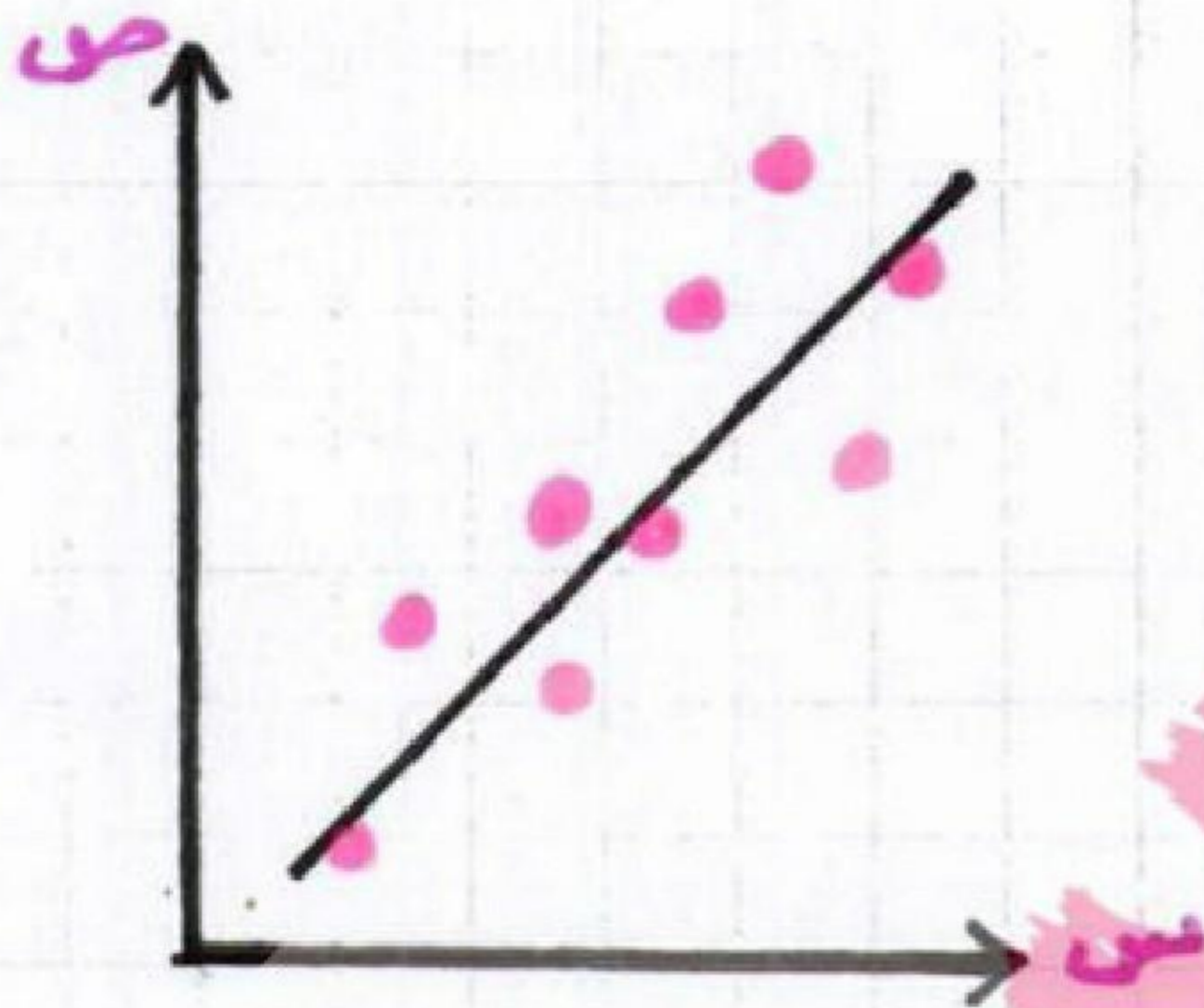
الإحصاء للثانوية العامة

١ الارتباط

هو طريقة إحصائية من خلالها يمكن تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

٢ شكل الانتشار

هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة بين هذين المتغيرين.

وإليك بعض الأشكال للتوضيح فإذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز س والظاهرة الثانية بالرمز ص فهناك ارتباط خطي عكسي وارتباط خطي طردي.

شكل (١) شكل (٢)

شكل (٣)

شكل (١) لا يوجد ارتباط

شكل (٢) يوجد ارتباط خطي عكسي.

شكل (٣) يوجد ارتباط خطي طردي.

الارتباط الخطي :-

يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين.

مستر / محمود حمدان
01153797200

معامل الارتباط :

يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمي نسبي يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث :

ر ∈ [-١ ، ١] ← -١ ≤ ر ≤ ١

ملاحظات

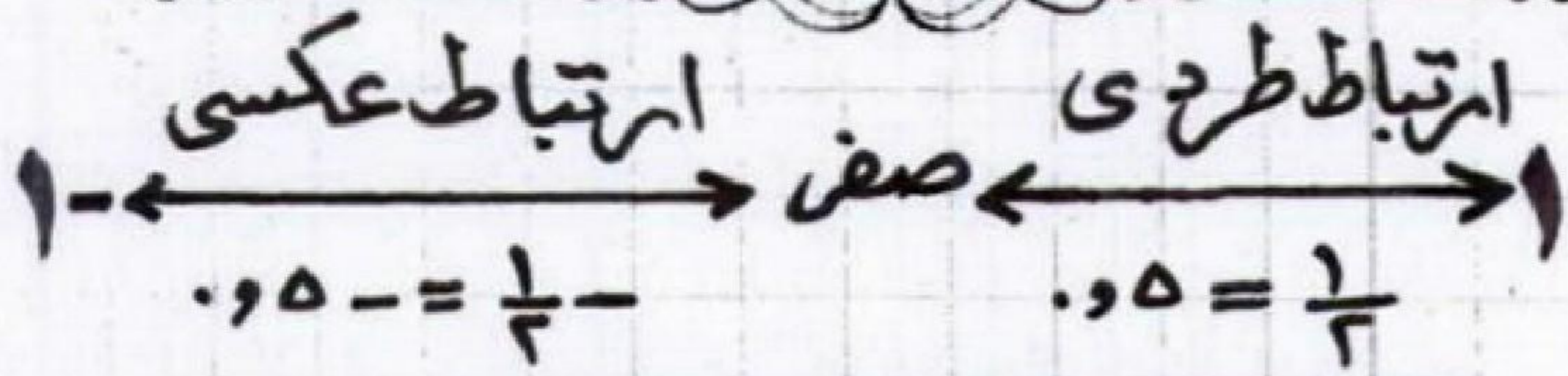
(١) اذا كان معامل الارتباط ر = ١ فإنه يقال أنه الارتباط "طردي تام"

واذا كان معامل الارتباط ر = -١ فإنه يقال أنه الارتباط "عكسي تام"

وينعدم الارتباط عند ر = ٠

(٢) كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد ١ كان الارتباط الطردي بين المتغيرين قويًا .

وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردي ضعيفاً

وينطبق نفس الكلام على الارتباط العكسي

توضيح :

ارتباط طردي ، ارتباط عكسي

١ ← صفر → -١

١/٢ = ٠٫٥ ، -١/٢ = -٠٫٥

ارتباط طردي قوي	ارتباط طردي ضعيف	ارتباط عكسي ضعيف	ارتباط عكسي قوي

طردي تام ، عدم ارتباط ، عكسي تام

(١) اختر :

معامل الارتباط الأقوى فيما يلي هو ...

-٠٫٩ ، -٠٫٥ ، ٠٫٤ ، ٠٫٧

الحل : ٠٫٧

معامل ارتباط بيرسون

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز (ر) فإن معامل ارتباط بيرسون يعطى من العلاقة

$$ر = \frac{ن \sum سص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \times \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

حيث

$\sum$: رمز التجميع وتقرأ مجموع

ن : عدد المفردات

مستر / محمود حمـــدان
01153797200

مثال

الجدول التالى يبين الدرجات التى حصل عليها ١٠ طلاب فى مادتى الرياضيات والتاريخ:

الرياضيات س	٧٥	٨٠	٩٣	٦٥	٨٧	٧١	٩٨	٦٩	٨٤	٧٨
التاريخ ص	٨٢	٧٨	٨٦	٧٢	٩١	٨٠	٩٥	٧٣	٨٩	٧٤

والمطلوب حساب: معامل ارتباط بيرسون وتحديد نوع الإرتباط؟

الحل

نكون جدول كالتالى:

س	ص	س²	ص²	س × ص
٧٥	٨٢	٥٦٢٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
٨٠	٧٨	٦٤٠٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٩٣	٨٦	٨٦٤٩	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٦٥	٧٢	٤٢٢٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٧	٩١	٧٥٦٩	٨٢٨١	٧٩١٧
٧١	٨٠	٥٠٤١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩٨	٩٥	٩٦٠٤	٩٠٢٥	٩٣١٠
٦٩	٧٣	٤٧٦١	٥٣٢٩	٥٠٣٧
٨٤	٨٩	٧٠٥٦	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٨	٧٤	٦٠٨٤	٥٤٧٦	٥٧٧٢
مج س = ٨٠٠	مج ص = ٨٢٠	مج س² = ٦٥٠١٤	مج ص² = ٦٧٨٢٠	مج س × ص = ٦٦٢٦٠

$$ر = \frac{ن \text{ مج س ص} - (\text{مج س} \times \text{مج ص})}{\sqrt{ن \text{ مج س}^2 - (\text{مج س})^2} \times \sqrt{ن \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

$$ر = \frac{١٠ \times ٦٦٢٦٠ - (٨٠٠ \times ٨٢٠)}{\sqrt{١٠ \times ٦٥٠١٤ - (٨٠٠)^2} \times \sqrt{١٠ \times ٦٧٨٢٠ - (٨٢٠)^2}}$$

$\simeq$ ٠,٨٦٦

والارتباط طردى قوى.

مثال

من بيانات الجدول التالى:

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطى بين س، ص ثم حدد نوعه؟

الحل

س	ص	س²	ص²	س ص
٢٠	٣٥	٤٠٠	١٢٢٥	٧٠٠
٢٣	٣١	٥٢٩	٩٦١	٧١٣
٢٤	٣٠	٥٧٦	٩٠٠	٧٢٠
٢٥	٢٧	٦٢٥	٧٢٩	٦٧٥
٢٨	٢٩	٧٨٤	٨٤١	٨١٢
٣٠	٢٨	٩٠٠	٧٨٤	٨٤٠
مج س = ١٥٠	مج ص = ١٨٠	مج س² = ٣٨١٤	مج ص² = ٥٤٤٠	مج س ص = ٤٤٦٠

مستر / محمود حمـــدان
01153797200

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - (\text{مج س} \times \text{مج ص})}{\sqrt{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2} \times \sqrt{\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٦ \times ٤٤٦٠ - (١٥٠ \times ١٨٠)}{\sqrt{٦ \times ٣٨١٤ - (١٥٠)^2} \times \sqrt{٦ \times ٥٤٤٠ - (١٨٠)^2}}$$

$\therefore$ ر $\simeq$ −٠,٧٩٣

$\therefore$ الارتباط عكسي قوي.

مثال

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان :

مج س = ٦٨ ، مج ص = ٣٦

، مج س ص = ٣٤٨ ، مج س^2 = ٦٢٠

، مج ص^2 = ٢٠٤ ، ن = ٨ ؟

الحل

هنا البيانات جاهزة نعوض في القانون

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - (\text{مج س} \times \text{مج ص})}{\sqrt{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2} \times \sqrt{\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

$$= \frac{٣٤٨ \times ٨ - (٣٦ \times ٦٨)}{\sqrt{٦٢٠ \times ٨ - (٦٨)^2} \times \sqrt{٢٠٤ \times ٨ - (٣٦)^2}}$$

= ١ $\therefore$ الارتباط طردي تام

مثال

أوجد ارتباط بيرسون بين س ، ص ثم حدد نوعه :

مج س = ٩٢ ، مج ص = ٣٦

، مج س ص = ٣٧٢ ، مج س^2 = ١١٠٠

، مج ص^2 = ٢٠٤ ، ن = ٨ ؟

الحل

$$\because \text{ر} = \frac{\text{ن مج س ص} - (\text{مج س} \times \text{مج ص})}{\sqrt{\text{ن مج س}^2 - (\text{مج س})^2} \times \sqrt{\text{ن مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2}}$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٣٧٢ \times ٨ - (٣٦ \times ٩٢)}{\sqrt{١١٠٠ \times ٨ - (٩٢)^2} \times \sqrt{٢٠٤ \times ٨ - (٢٠٤)^2}}$$

= −١

$\therefore$ الارتباط عكسي تام

تدريب

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص ثم حدد نوع الارتباط :

مج س = ١٣ ، مج ص = ٢٤ ،

مج س ص = ١٣٥ ، مج س^2 = ٥٠٠

، مج ص^2 = ٩٠٠ ، ن = ٦ ؟

مستر / محمود حمــــدان

01153797200

② معامل ارتباط سبيرمان (الرتب)

يتعين من العلاقة :

$$ر = 1 - \frac{6 \sum ف^2}{ن(ن^2 - 1)}$$

حيث : ف : هي الفرق بين رتب المتغيرين س ، ص

ن : عدد قيم كل من المتغيرين .

لاحظ : معامل ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواء كانت الكلمات كمية أو وصفية .

بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط

- يتميز معامل سبيرمان لارتباط الرتب بسهولة حسابه حتى لو كانت البيانات غير مرتبة . يؤخذ على معامل سبيرمان إهماله الفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالي فهو أقل دقة

مثال : قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقديرات مادتين دراسيتين لعدد 7 طلاب وسجل النتائج كالتالي :

س	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جداً
ص	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدا	مقبول

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه ؟

خطوات الحل:

١ ترتيب تقديرات المادتين تصاعديًا:

ونلاحظ فى المادة الأولى أن الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ١، ٢، ٣ فى الجدول

فنحسب رتبة كل منها = $\frac{١+٢+٣}{٣}$ = ٢ وهو الوسط الحسابي للأعداد ١، ٢، ٣ وبالمثل فى المادة الثانية نلاحظ الحالة (ضعيف) تكررت مرتين وشغلت الأماكن ١، ٢ لذلك رتبة كل منها = $\frac{١+٢}{٢}$ = ١٫٥

كذلك المستوى (مقبول) تكرر ثلاث مرات وشغلت الأماكن ٣، ٤، ٥

فتكون رتبة كل منها = $\frac{٣+٤+٥}{٣}$ = ٤

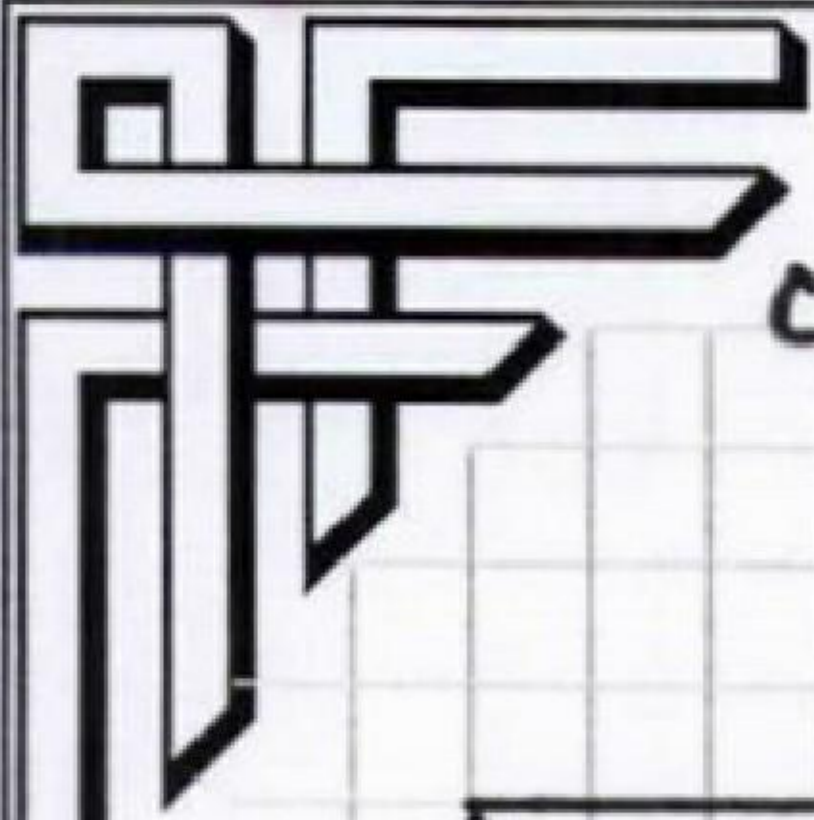
٢ نكون الجدول:

س	ص	رتبة س	رتبة ص	ف	ف²
ضعيف	ضعيف	٢	١٫٥	٠٫٥	٠٫٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	صفر	صفر
ضعيف	جيد	٢	٦	٤	١٦
جيد	مقبول	٥	٤	١	١
ضعيف	ضعيف	٢	١٫٥	٠٫٥	٠٫٢٥
ممتاز	جيد جداً	٧	٧	صفر	صفر
جيد جداً	مقبول	٦	٤	٢	٤

مجـ ف² = ٢١٫٥

$$\because ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن(ن^٢-١)}$$

$$\therefore ر = ١ - \frac{٦ \times ٢١٫٥}{٧(٧^٢-١)} \simeq ٠٫٦١٦١$$ والارتباط طردي قوي

مثال :

احسب معامل الارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص وذلك من خلال الجدول التالي :-

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠

الحل

نتبع خطوات الحل السابقه ونكون الجدول :

س	ص	رتبه س	رتبه ص	ف	ف²
٤	٧	٦	٢	٤	١٦
٧	٦	٤	٤	٠	٠
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
٥	٤	٥	٦	١	١
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	١	١	٠	٠

$\sum$ ف² = ٢١,٥

∵ ر = ١ − $\frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2-١)}$

∴ ر = ١ − $\frac{٦ \times ٢١,٥}{٦(٦^2-١)}$

≃ ٠,٣٨٥٧ وهو ارتباط طردي ضعيف

مثال :

احسب معامل ارتباط سبيرمان بين س ، ص وحدد نوعه ؟

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

الحل :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
١٠	٥	١	٦	٥	٢٥
٧	٨	٣,٥	٤	٠,٥	٠,٢٥
٨	٧	٢	٥	٣	٩
٧	٩	٣,٥	٢,٥	١	١
٦	٩	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
٤	١٠	٦	١	٥	٢٥

$\sum$ ف² = ٦٦,٥

∵ ر = ١ − $\frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2-١)}$

≃ −٠,٩ عكسي قوي

مثال :

من بيانات الجدول التالي
احسب معامل ارتباط سبيرمان
محدداً نوعه؟

س	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول
ص	ممتاز	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	مقبول

الحل :

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ف²
جيد جداً	ممتاز	٢٫٥	١	١و٥	٢و٢٥
ممتاز	جيد جداً	١	٢و٥	١و٥	٢و٢٥
جيد	مقبول	٤	٤٫٥	-٠و٥	٠و٢٥
جيد جداً	جيد جداً	٢و٥	٢٫٥	٠	
مقبول	مقبول	٥	٤٫٥	٠و٥	٠و٢٥
				مج ف² = ٥	

من الجدول ن = ٥

مج ف² = ٥

$$\therefore ر = ١ - \frac{٦ \text{ مج ف}^٢}{ن(ن^٢-١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٥}{٥(٢٥-١)} = ٠و٧٥$$

∴ طردي قوي

ملحوظة :

1. للتأكيد مج ف = صفر
2. معامل بيرسون أدق من معامل سبيرمان لأنه يعتمد على القيم.

تدريب

احسب معامل
ارتباط بين س، ص
بيرسون محدداً نوعه؟

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

الإنحدار

هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

أنواع الإنحدار:

① انحدار خطي بسيط

② انحدار متعدد

③ انحدار غير خطي

وسوف تقتصر دراستنا على الانحدار الخطي البسيط

معادلة خط الإنحدار

$$ص = أ + ب س$$

حيث أ : الجزء المقطوع من محور الصادات

ب : معامل انحدار ص على س وهي تعبر عن ميل خط الإنحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

والطريقة الأفضل شيوعاً لإيجاد أفضل قيم لـ أ، ب تسمى طريقة المربعات الصغرى.

طريقة المربعات الصغرى:

$$\hat{ص} = أ + ب س$$

حيث $\hat{ص}$ تقرأ ص هات

ب تسمى بمعامل انحدار ص على س وهي تعبر عن ميل خط الإنحدار

حيث :

$$\text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}} \quad ، \quad \text{ب} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}$$

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة الانحدارية |

↓ ص من الجدول ↓ ص من معادلة الانحدار

مثال :

من الجدول الآتي :

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

أوجد : (١) معادلة خط الانحدار (٢) تنبأ بقيمة ص عندما س = ٧

(٣) أوجد قيمة الخطأ عندما س = ٨ ؟

الحل :

س	ص	س^2	ص^2	س ص
١٠	٦	١٠٠	٣٦	٦٠
١٢	٨	١٤٤	٦٤	٩٦
١٥	٦	٢٢٥	٣٦	٩٠
١٢	٦	١٤٤	٣٦	٧٢
١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦
٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠
٧١	٤٠	٨٧٣	٢٧٨	٤٨٤

من الجدول

ن = ٦

$\sum$ س = ٧١

$\sum$ ص = ٤٠

$\sum \text{س}^2$ = ٨٧٣

$\sum \text{ص}^2$ = ٢٧٨

$\sum$ س ص = ٤٨٤

ثم نطبق القانون ⇐

ب = (ن مجـ س ص − مجـ س × مجـ ص) ÷ (ن مجـ س² − (مجـ س)²) = (٦ × ٤٨٤ − ٧١ × ٤٠) ÷ (٦ × ٨٧٣ − (٧١)²)

≃ ٠٫٣٢٤٩

∴ أ = (مجـ ص − ب مجـ س) ÷ ن = (٤٠ − ٠٫٣٢٤٩ × ٧١) ÷ ٦ ≃ ٢٫٨٢٢٣

① ∴ معادلة خط الانحدار هى ص = أ + ب س

∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ س

② عندما س = ٧

∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٧ = ٥٫٠٩٦٦

③ عند س = ٨

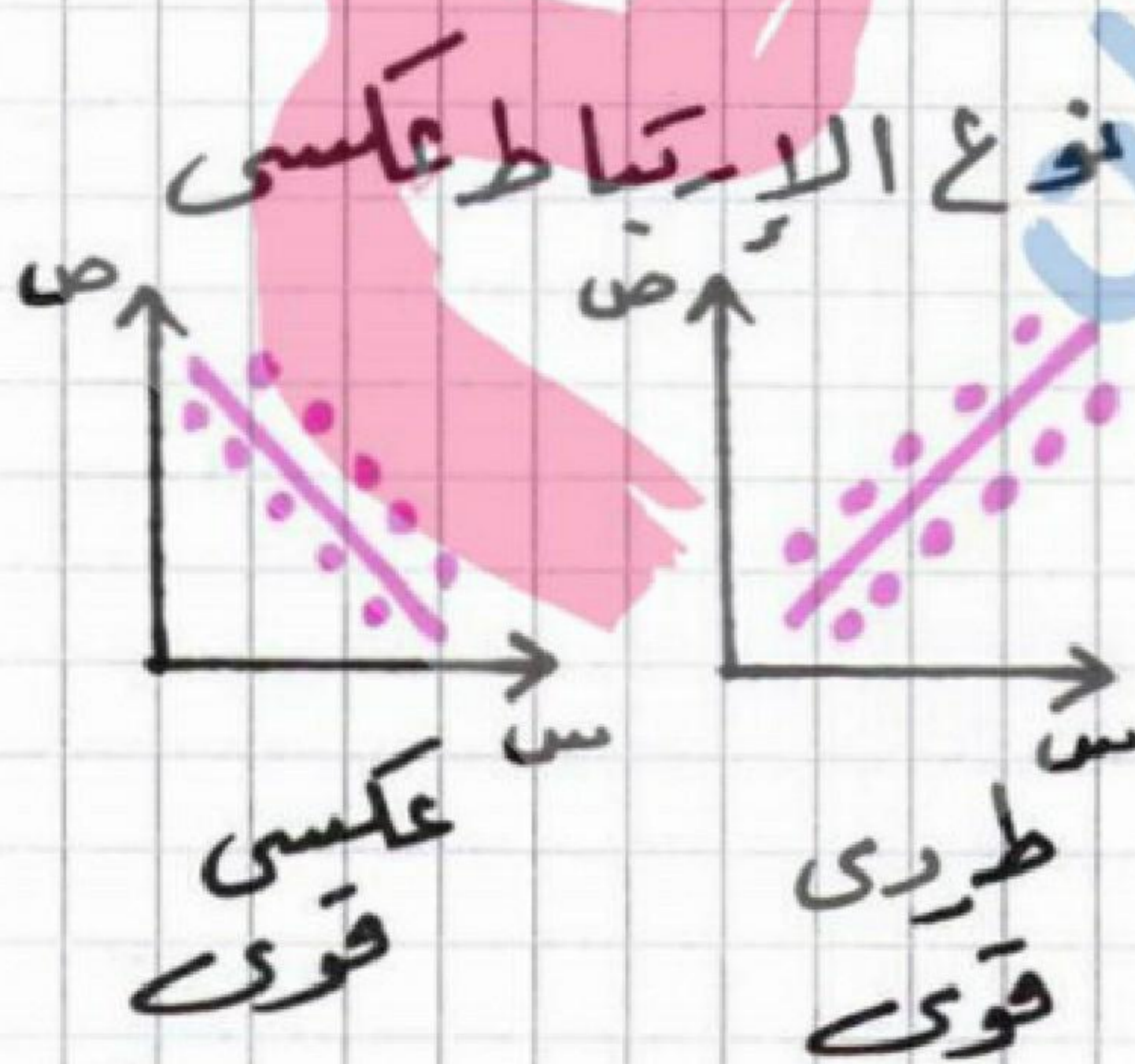
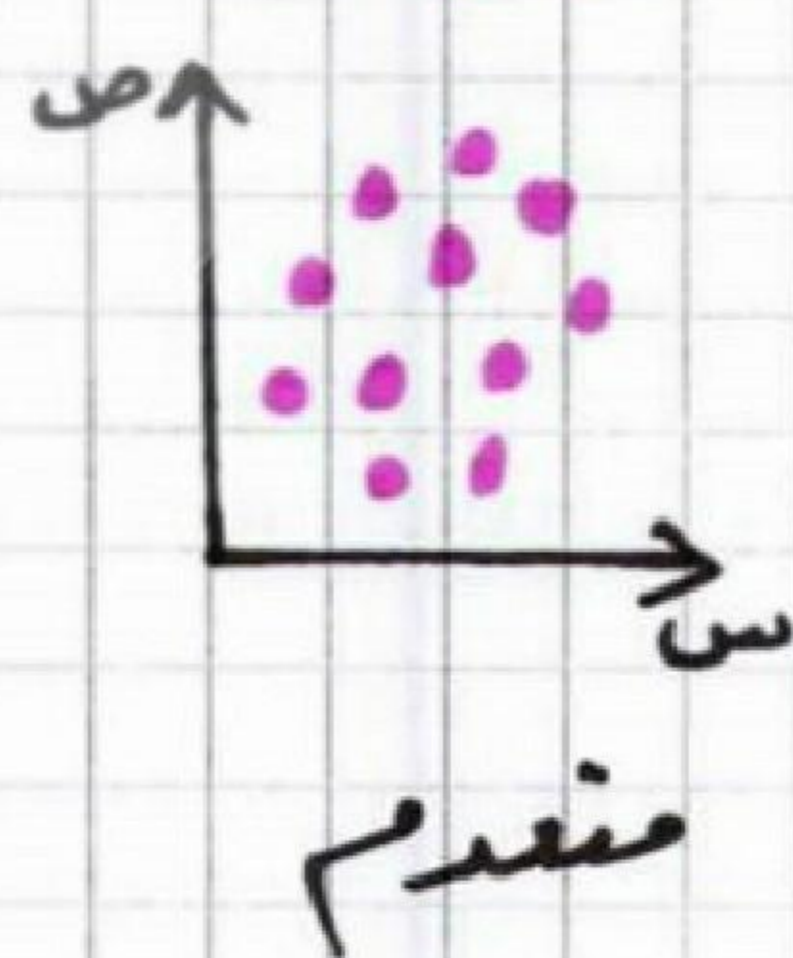
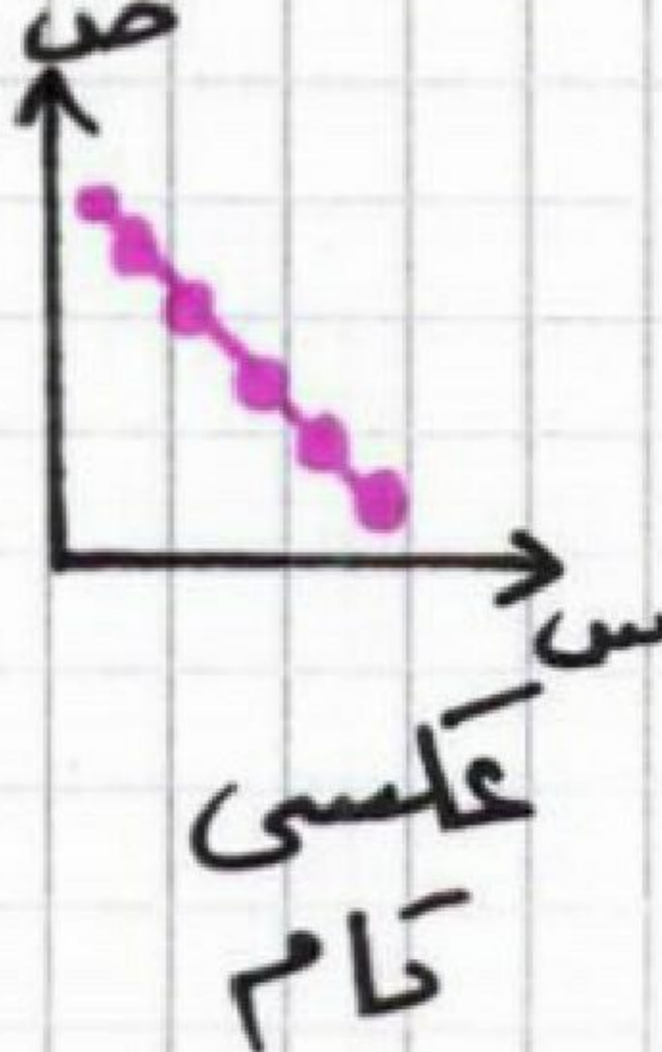
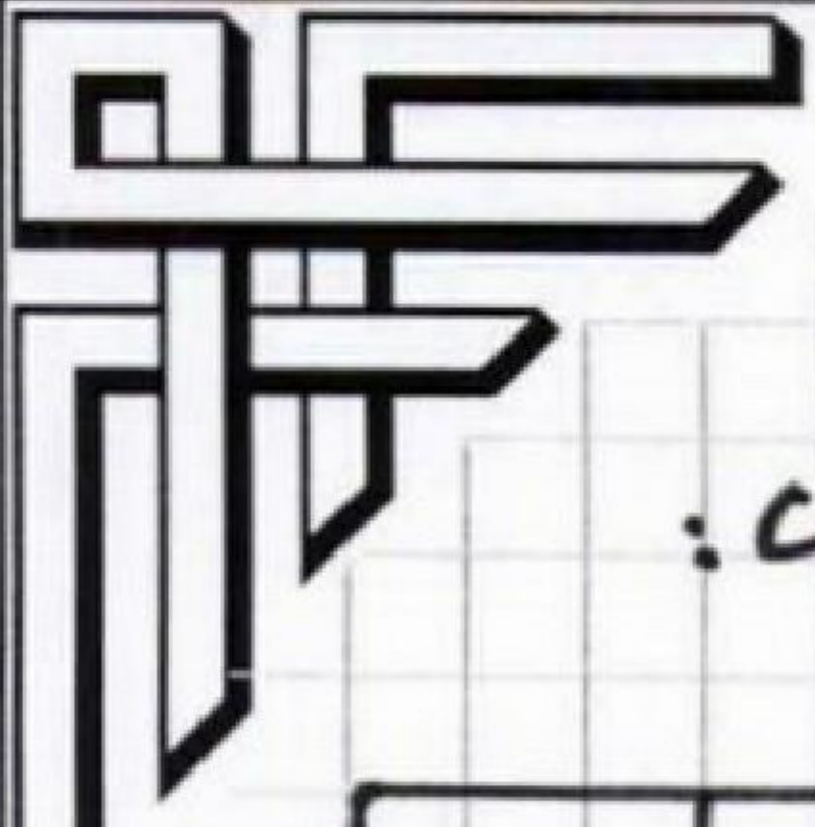
∴ ص = ٢٫٨٢٢٣ + ٠٫٣٢٤٩ × ٨ = ٤٫٨١٤٣

دى قيمة ص الانحدارية

∴ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة الانحدارية |

= | ٥ − ٤٫٨١٤٣ | = ٠٫١٨٥٧

شوية ملاحظات:

① اذا كانت ب:
- ب > ٠ ← نوع الإرتباط طردى
- ب < ٠ ← نوع الإرتباط عكسى

مثال :

الجدول التالى يمثل إنتاج أحد المحاصيل الزراعية (ص) من المساحة المنزرعة (س) بالفدان :

س	٥٠	٢٠٠	١١٠	٨٠	١٢٠	٧٤٫٥	٨٨٫٩	٥٫٧	١١	٣٫٢
ص	١٤٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٦	٢٤٠٫٥	٢٠٠٫٦	٣٣٫٥	٦٩٫٨	١٨٫٧

(١) أوجد معادلة خط الإنحدار (٢) تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلو اذا كانت المساحة المنزرعة تساوى ١٠٠ فدان

(٣) أوجد مقدار الخطأ في الإنتاج اذا علمت أن المساحة المزروعة ١٢٠ فدان .

الحل :

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س × ص
٥٠	١٤٠	٢٥٠٠	١٩٦٠٠	٧٠٠٠
٢٠٠	٥٠٠	٤٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
١١٠	٤٠٠	١٢١٠٠	١٦٠٠٠٠	٤٤٠٠٠
٨٠	٣٠٠	٦٤٠٠	٩٠٠٠٠	٢٤٠٠٠
١٢٠	٣٥٦	١٤٤٠٠	١٢٦٧٣٦	٤٢٧٢٠
٧٤٫٥	٢٤٠٫٥	٥٥٥٠٫٢٥	٥٧٨٤٠٫٢٥	١٧٩١٧٫٢٥
٨٨٫٩	٢٠٠٫٦	٧٩٠٣٫٢١	٤٠٢٤٠٫٣٦	١٧٨٣٣٫٣٤
٥٫٧	٣٣٫٥	٣٢٫٤٩	١١٢٢٫٢٥	١٩٠٫٩٥
١١	٦٩٫٨	١٢١	٤٨٧٢٫٠٤	٧٦٧٫٨
٣٫٢	١٨٫٧	١٠٫٢٤	٣٤٩٫٦٩	٥٩٫٨٤
مجـ ٧٤٣٫٣	٢٢٥٩٫١	٨٩٠١٧٫١٩	٧٥٠٧٦٠٫٥٩	٢٥٤٤٨٩٫١٨

من الجدول :

ن = ١٠

$\sum$س = ٧٤٣٫٣

$\sum$ص = ٢٢٥٩٫١

$\sum س^2$ = ٨٩٠١٧٫١٩

$\sum ص^2$ = ٧٥٠٧٦٠٫٥٩

$\sum$س ص = ٢٥٤٤٨٩٫١٨

نحسب قيمة ب

$$\therefore ب = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} = \frac{١٠ \times ٢٥٤٤٨٩٫١٨ - ٧٤٣٫٣ \times ٢٢٥٩٫١}{١٠ \times ٨٩٠١٧٫١٩ - (٧٤٣٫٣)^2}$$

$$\simeq ٢٫٥٦٣٧$$

01153797200

مستر / محمود حمـــدان

نحسب قيمة أ ∴ أ = $\bar{ص}$ - ب $\bar{س}$ حيث :

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$ ، $\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$

∴ $\bar{س} = \frac{٧٤٣,٣}{١٠} = ٧٤,٣٣$ ، $\bar{ص} = \frac{٢٢٥٩,١}{١٠} = ٢٢٥,٩١$

∴ أ = ٢٢٥,٩١ - ٢,٥٦٣٧ × ٧٤,٣٣ ≃ ٣٥,٣٥

∴ معادلة خط الانحدار هي ص = أ + ب س

∴ ص = ٣٥,٣٥ + ٢,٥٦٣٧ س

ثانياً: بالتعويض عن س = ١٠٠

∴ ص = ٣٥,٣٥ + ٢,٥٦٣٧ × ١٠٠ = ٢٩١,٧٢ كيلوجرام

ثالثاً: لإيجاد مقدار الخطأ عند س = ١٢٠ فدان

∴ ص = ٣٥,٣٥ + ٢,٥٦٣٧ × ١٢٠ ≃ ٣٤٣

∴ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة الانحدارية |

= | ٣٥٦ - ٣٤٣ | = ١٣

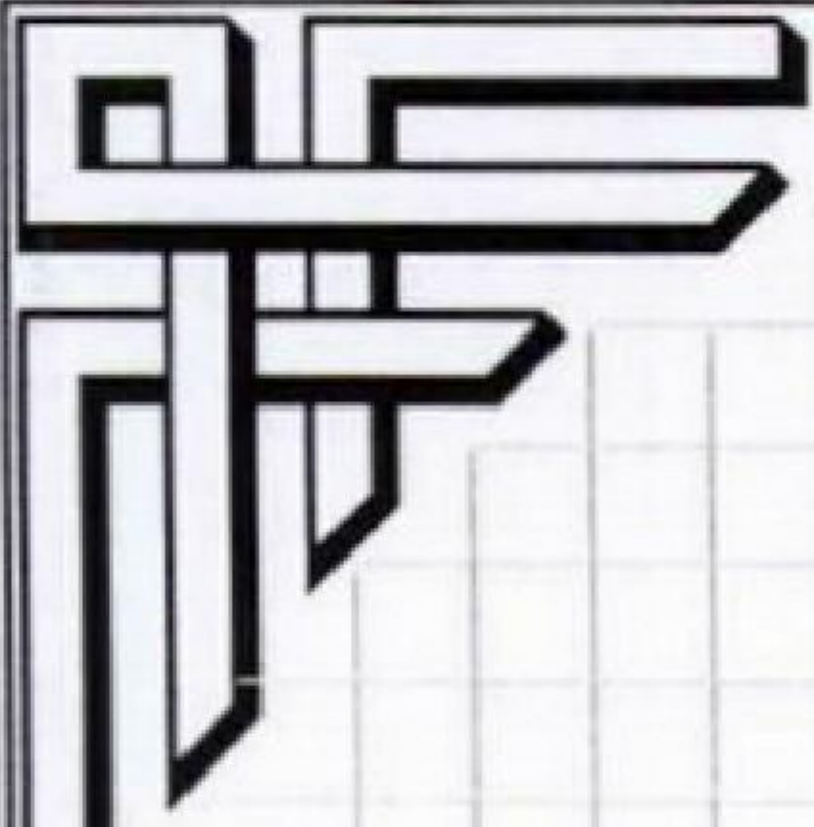
مثال ٤: في دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) بالآف الجنيهات كانت النتائج الآتية :

$\sum$س = ١٣٠ ، $\sum$ص = ١٠٠ ، $\sum$س ص = ٥١٦ ، $\sum$س² = ٧٢٠

$\sum$ص² = ٤١٠ ، ن = ٤٠٠

(١) أوجد معادلة خط الانحدار ؟

(٢) أوجد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص بطريقة بيرسون وحدد نوعه ؟

(٣) تنبأ بقيمة الاستهلاك (ص) عندما يصل الدخل ... ١٠ جنيه ؟

الحل: نوجد ب حيث $ب = \frac{ن مج س ص - مج س \times مج ص}{ن مج س^2 - (مج س)^2}$

$\therefore ب = \frac{40 \times 516 - (120 \times 100)}{40 \times 720 - (120)^2} = 0{,}6$

نحسب قيمة أ حيث $أ = \frac{مج ص - ب مج س}{ن} = \frac{100 - 0{,}6 \times 120}{40} = 0{,}7$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار هي $\hat{ص} = أ + ب س$

$\therefore ص = 0{,}7 + 0{,}6 س$ #

عند س = 1000 جنيه $\therefore ص = 0{,}7 + 0{,}6 \times 1000 = 600{,}7$ جنيه

ثم لايجاد معامل ارتباط بيرسون

$\therefore ر = \frac{ن مج س ص - (مج س \times مج ص)}{\sqrt{ن مج س^2 - (مج س)^2} \sqrt{ن مج ص^2 - (مج ص)^2}}$

$= \frac{40 \times 516 - (120 \times 100)}{\sqrt{40 \times 720 - (120)^2} \sqrt{40 \times 410 - (100)^2}} = 0{,}9$

طردي قوي

اختر:

① المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هي ......

$\hat{ص} = أ س + ب$ ، $\hat{ص} = أ + ب س$ (الإجابة) ، $\hat{ص} = أ ص + ب$ ، $\hat{ص} = أ + ب ص$

② اذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{ص} = 3 + 0{,}5 س$ فإن قيمة ص المتوقعة عند س = 6 هي :

4 ، 5 (الإجابة) ، 6 ، 7 ، 8

③ اذا وقعت النقطتان (11,5 ، 10) ، (5,6 ، 5) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون :

طرديًا ، عكسيًا ، تامًا (الإجابة) ، منعدمًا

④ اذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{ص} = 3 - س$ فإن نوع الارتباط يكون ...

طرديًا تامًا ، لا يوجد ارتباط ، منعدمًا ، عكسيًا تامًا (الإجابة)

الباب الثاني

الاحتمال الشرطي - الأحداث المستقلة

تذكر أن :

① ل(أ) = ن(أ) / ن(ف) — احتمال وقوع الحدث أ

② ل(أَ) = ١ - ل(أ) — احتمال عدم وقوع أ (نفي أ)

③ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

، ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∪ ب)

← ∪ : أو / أي من / على الأقل / مصدر الحدث

← ∩ : و / كلاهما معًا

④ ل(أ ∩ بَ) = ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب)

احتمال وقوع أ فقط - احتمال وقوع أ ونفي ب

⑤ ل(أَ ∪ بَ) = ١ - ل(أ ∩ ب) — احتمال عدم وقوعهما معًا أو أحدهما على الأكثر

⑥ ل(أَ ∩ بَ) = ١ - ل(أ ∪ ب) — احتمال عدم وقوع أي منهما

⑦ ل(أَ ∪ ب) = ل(أ - ب)َ = ل(أَ) + ل(أ ∩ ب)

احتمال عدم وقوع أ فقط (عدم وقوع أ بمفرده)

ملاحظات

① إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان ⇐ ل(أ ∩ ب) = صفر

② إذا كان أ ⊂ ب ⇐ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ، ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

، ل(أ - ب) = صفرًا

③ ل(أ) ∈ [٠ ، ١] ، ل(∅) = صفرًا ، ل(ف) = ١

الاحتمال الشرطي:

اذا كان أ، ب $\subset$ ف فإن:

$$\text{ل}(\text{أ}/\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{\text{احتمال التقاطع}}{\text{الاحتمال الثاني}}$$

وتقرأ احتمال أ بشرط ب

ملحوظة الحدث الأول يأتي بعد كلمة احتمال والحدث الثاني يأتي بعد كلمة: علماً بأن - إذا عُلم أن - بشرط - إذا كان.....

مثال ١:

اذا كان ل(أ) = ٠٫٣، ل(ب) = ٠٫٤، ل(أ∩ب) = ٠٫٢

إذا كان أ، ب حدثان من فضاء العينة فأوجد:

(١) ل(أ/ب) (٢) ل(ب/أ) (٣) ل(أ/بَ)

تذكر: ل(أ∩بَ) = ل(أ) − ل(أ∩ب)، ل(بَ) = ١ − ل(ب)

الحل:

(١) $$\text{ل}(\text{أ}/\text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(٢) $$\text{ل}(\text{ب}/\text{أ}) = \frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

(٣) $$\text{ل}(\text{أ}/\bar{\text{ب}}) = \frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\bar{\text{ب}})}{\text{ل}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{1 - 0.4} = \frac{0.3 - 0.2}{0.6} = \frac{1}{6}$$

مثال ٢

فصل دراسي به ٥٠ طالب فإذا كان ١٥ طالب منهم يرسبون في الكيمياء، ٢٥ طالب منهم يرسبون في الأحياء، ١٠ منهم يرسبون في المادتين معاً أوجد احتمال أن يكون الطالب حسن يرسب في:

① الكيمياء بشرط الأحياء ؟

② الأحياء إذا كان راسباً الكيمياء ؟

③ الأحياء إذا علم أنه لا يرسب الكيمياء ؟

الحل

بفرض أن : الكيمياء ← ٩ ، الأحياء ← ب ، الكيمياء والأحياء ٩∩ب

∴ ل(٩) = ١٥/٥٠ = ٣/١٠ ، ل(ب) = ٢٥/٥٠ = ١/٢ ، ل(٩∩ب) = ١٠/٥٠ = ١/٥

① ل(٩/ب) = ل(٩∩ب) / ل(ب) = ١/٥ ÷ ١/٢ = ٢/٥

② ل(ب/٩) = ل(ب∩٩) / ل(٩) = ١/٥ ÷ ٣/١٠ = ١٠/١٥ = ٢/٣

③ ل(ب/٩َ) = ل(ب∩٩َ) / ل(٩َ) = ٣/١٠ ÷ ٧/١٠ = ٣/٧

لاحظ :
ل(ب∩٩َ)
= ل(ب) − ل(ب∩٩)
= ١/٢ − ١/٥ = ٣/١٠
، ل(٩َ)
= ١ − ل(٩)
= ١ − ٣/١٠ = ٧/١٠

الأحداث المستقلة :

يقال أن ٩، ب حدثان مستقلان اذا كان :

ل(٩∩ب) = ل(٩) × ل(ب)

احتمال تقاطع الحدثين = احتمال الحدث الأول × الثاني

مثال : اذا كان ل(٩) = ٦,٠ ، ل(ب) = ٣,٠ ، ل(٩ − ب) = ٤٢,٠
أثبت أن ٩، ب حدثان مستقلان ؟

الحل :

∵ ل(٩ − ب) = ل(٩) − ل(٩∩ب)

∴ ل(٩∩ب) = ل(٩) − ل(٩ − ب) = ٦,٠ − ٤٢,٠ = ١٨,٠ ①

∵ ل(٩) × ل(ب) = ٦,٠ × ٣,٠ = ١٨,٠ ②

ل(٩∩ب) = ل(٩) × ل(ب) من ١، ٢ ∴

∴ الحدثان ٩، ب مستقلان

مثال : اذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان :

ل(أ) = ٦و. ، ل(ب) = ٣و. فأوجد كلاً من :

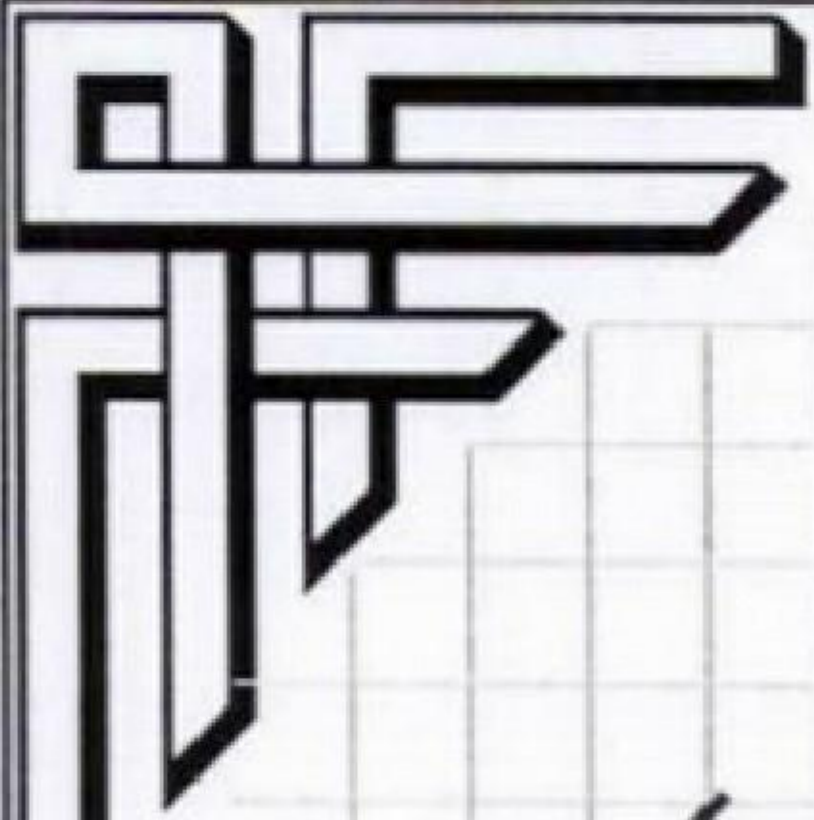
(١) ل(أ ∩ ب) (٢) ل(أ ∪ ب) (٣) ل(أ/ب)

الحل : ∵ أ، ب حدثين مستقلين

(١) ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٦و. × ٣و. = ١٨و.

(٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٦و. + ٣و. − ١٨و. = ٧٢و.

(٣) ل(أ/ب) = ل(أ ∩ ب) / ل(ب) = ١٨و. / ٣و. = ٦و.

مثال : أطلق جنديان قذيفة نحو هدف ما فاذا كان ل(أ) = ٧و. ، ل(ب) = ٥و. أوجد احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط؟

الحل : ∵ إصابة الهدف من أحدهما لا تؤثر في الآخر

∴ الحدثان أ، ب مستقلين.

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = ٧و. × ٥و. = ٣٥و.

∴ احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط

= ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

= ل(أ) − ل(أ ∩ ب) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٧و. − ٣٥و. + ٥و. − ٣٥و. = ٥و.

ملاحظات

(١) اذا كان ل(أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب)
فإن الحدثين أ، ب غير مستقلين.

(٢) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(ب) ≠ صفر فإن :
ل(أ/ب) = ل(أ)

③ الحدثين المتنافيين أ ، ب يكونان مستقلين إذا وفقط إذا كان ل(أ) × ل(ب) = صفر

مثال: أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن كان أ حدث ظهور عدد زوجي ، ب حدث ظهور عدد أولي هل أ ، ب حدثين مستقلين ؟

الحل:

أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ⟸ ل(أ) = $\frac{1}{2}$ ، ب = {٢ ، ٣ ، ٥} ⟸ ل(ب) = $\frac{1}{2}$

∴ ل(أ) × ل(ب) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ⟵ ①

∵ أ ∩ ب = {٢} ⟸ ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{6}$ ⟵ ②

من ① ، ② نجد أن ل(أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب)

∴ أ ، ب غير مستقلين .

④ **مثال:** اذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ . بيّن مع ذكر السبب هل : أ ، ب حدثين مستقلان أم لا ؟

الحل:

مثال: كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء ، ٥ كرات سوداء ، اذا سحبت كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (إرجاع) فما احتمال أن تكون : ① الكرتان سوداوين ؟

② الأولى سوداء والأخرى حمراء ؟

③ إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء ؟

الحل

① الأولى سوداء و الثانية سوداء

$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

② الأولى سوداء و الثانية حمراء

$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

③ الأولى حمراء و الثانية سوداء أو الأولى سوداء و الثانية حمراء

$= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$

> لاحظ في المثال السابق: و ← $\cap$ ← $\times$
> والكسر الثاني طرحنا من المقام واحد لأنه السحب بدون إحلال

تمارين:

① إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢
أوجد قيمة ل(أ) إذا كان أ، ب
① حدثين متنافيين
② حدثين مستقلين

② إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦
فأوجد قيمة ل(أ ∪ ب) ، ل(أ − ب) ، ل(أ / ب) ؟

③ كيس يحتوي على ٧ كرات بيضاء و٣ كرات خضراء فإذا سحبت كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إحلال ما احتمال أن تكون:
① الكرتان بيضاوين ؟
② الأولى بيضاء والثانية خضراء ؟
③ إحدى الكرتين بيضاء والأخرى خضراء ؟

④ إذا كان ل(ب/أ) = $\frac{2}{3}$ ، ل(ب/أ') = $\frac{4}{7}$ ، ل(ب) = $\frac{3}{5}$ فأوجد:
ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب) ؟

الباب الثالث

المتغير العشوائى المتقطع

تعريف : المتغير العشوائى المتقطع س هو دالة مجالها ف ومجالها المقابل ح

مثال توضيحى : فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

إذا كان المتغير العشوائى هو عدد الكتابات فإن :

مدى المتغير العشوائى = { ٠ ، ١ ، ٢ }

ملحوظة البجربة الواحدة يعرف عليها العديد من المتغيرات العشوائية

التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى : هو جدول كما بالشكل :

سر	٠	١	٢	المجموع
د(سر)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

حيث سر يعبر عن المدى ، د(سر) تعبر عن الاحتمالات المناظرة

ولاحظ دائماً $\sum$ د(سر) = ١

وهذا الجدول السابق يمثل التوزيع الاحتمال للمثال السابق التوضيحي .

مثال : اذا كان س متغيراً عشوائياً مداه { ١ ، ٢ ، ٣ } وكان :

ل (س = ١) = ٢أ ، ل (س = ٢) = ٣أ ، ل (س = ٣) = أ

فأوجد قيمة أ ؟

الحل : ∵ س متغير عشوائى ∴ $\sum$ د(سر) = ١

∴ د(١) + د(٢) + د(٣) = ١ ⇐ ٢أ + ٣أ + أ = ١ ⇐ **٦أ = ١** ⇐ **أ = $\frac{١}{٦}$**

كيفية حساب :

① الوسط الحسابى (التوقع) ← μ

② التباين ← σ^2 ③ الإنحراف المعيارى ← σ

نكون جدول كالتالى :

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$	$س_ر^2 . د(س_ر)$
① المدى العمود الأول	② الإحتمالات العمود الثانى	① × ② ينتج العمود الثالث	① × ③ ينتج العمود الرابع
مجـ	1	$\mu = \sum س_ر . د(س_ر)$	$\sum س_ر^2 . د(س_ر)$

وبعد ما تكمل الجدول يكون :

الوسط الحسابى $\mu = \sum س_ر . د(س_ر)$ ⇐ يعنى مجموع العمود الثالث

التباين $\sigma^2 = \sum س_ر^2 . د(س_ر) - \mu^2$ ← يعنى مجموع العمود الرابع − μ^2

الإنحراف المعيارى $\sigma = + \sqrt{\text{التباين}}$

معامل الإختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100\%$

مثال : اذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠ ، ١٥٨٠ وانحرافهما المعيارى بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب احسب :

معامل الإختلاف لكل منهما ، ماذا تلاحظ ؟

الحل :

معامل اختلاف أ = ٢٥٠ / ١٨٥٠ × ١٠٠٪ = ١٣٫٥١ ٪

معامل اختلاف ب = ٢٣٠ / ١٥٨٠ × ١٠٠٪ = ١٤٫٥٦ ٪

نلاحظ أن النوع ب أكثر تشتتاً من أ .

مثال: اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي كالتالي

س ر	٠	١	٢	٣
د(س ر)	٠٫٣٥	٠٫٤	أ	٠٫١

أوجد قيمة أ ثم احسب كلاً من:

الوسط الحسابي - الانحراف المعياري - معامل الاختلاف ؟

الحل:

∵ س متغير عشوائي

∴ Σ د(س ر) = ١

٠٫٣٥ + ٠٫٤ + أ + ٠٫١ = ١

∴ أ = ١ - ٠٫٨٥ = ٠٫١٥

س ر	د(س ر)	س ر . د(س ر)	س ر² . د(س ر)
٠	٠٫٣٥	٠	٠
١	٠٫٤	٠٫٤	٠٫٤
٢	٠٫١٥	٠٫٣	٠٫٦
٣	٠٫١	٠٫٣	٠٫٩
مج	١	١	١٫٩

من الجدول المقابل:

μ = ١ ،

σ^2 = ١٫٩ - (١)² = ٠٫٩ ، σ = √٠٫٩ = ٠٫٣

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠٪ = ٠٫٣ / ١ × ١٠٠٪ = ٣٠ ٪

مثال: اذا كان س متغيراً عشوائياً مداه {٠، ١، ٢} ودالة توزيعه الإحتمالي تتحدد بالعلاقة: د(س) = أس / ٦ فإن قيمة

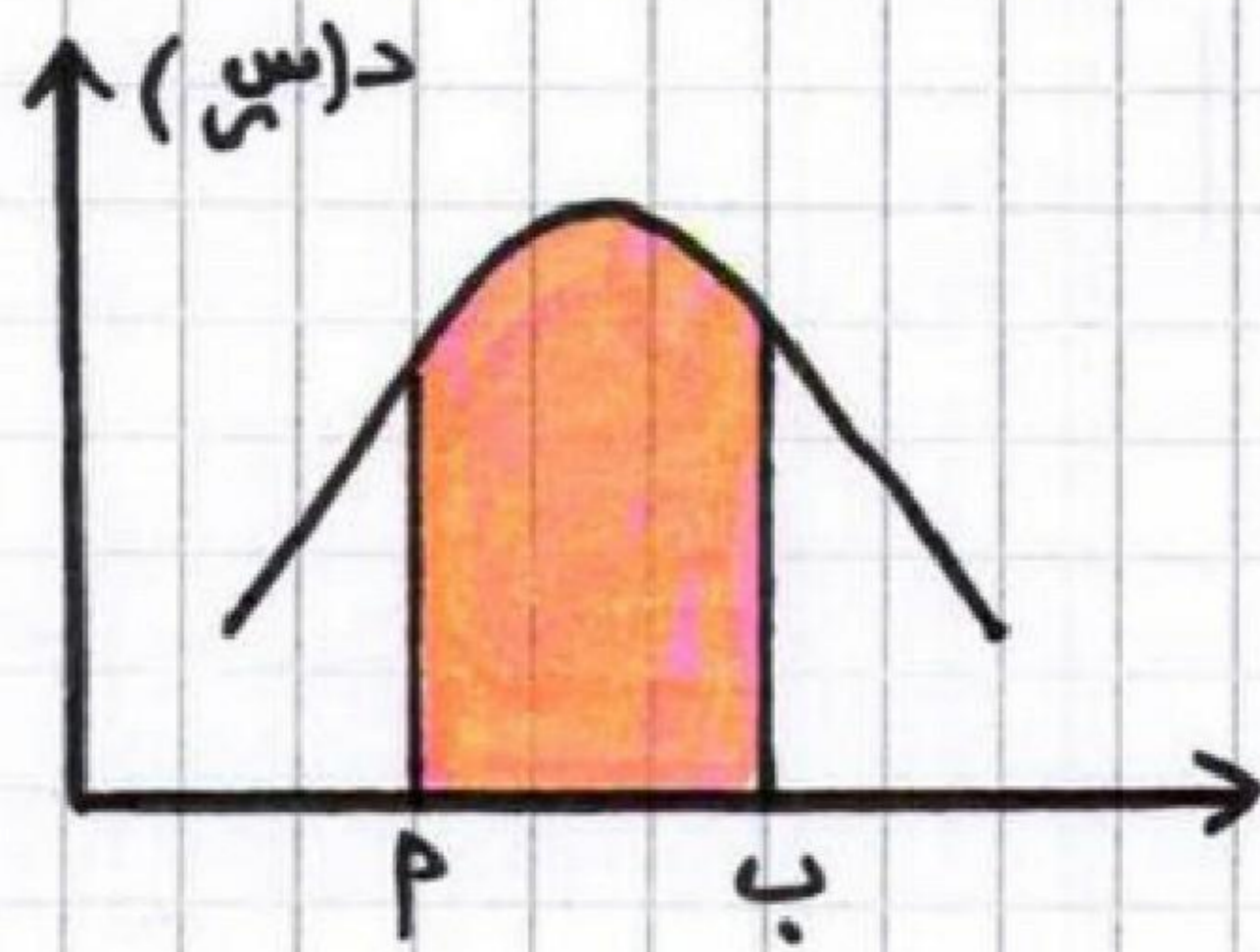
أ = ...

الحل:

∵ مج د(س ر) = ١ ∴ د(٠) + د(١) + د(٢) = ١

∴ ٠ + أ/٦ + ٢أ/٦ = ١ ⇐ ٣أ = ٦ ⇐ أ = ٢ #

المتغير العشوائي المتصل

هو متغير عشوائي مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية، تحقق هذه الشروط:

- د(س) ≥ ٠ لجميع قيم س ∈ لمجال الدالة.
- مساحة المنطقة المظللة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات = ١
- ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة المظللة

$= \frac{1}{2}$ [د(أ) + د(ب)] × (ب − أ)

مثال: اذا كان س متغير أعشوائيًا متصلاً

د(س) = { $\frac{1}{18}$(س+٢) ، −٢ ≤ س ≤ ٤ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

① أثبت أن د(س) دالة كثافة احتمالية للمتغير س

② أوجد ل (٠ < س < ٢)

③ أوجد ل (س > ٢)

الحل:

①

د(−٢) = $\frac{1}{18}$(−٢+٢) = صفر ،

د(٤) = $\frac{1}{18}$(٤+٢) = $\frac{6}{18}$ = $\frac{1}{3}$

∴ ل(−٢ < س < ٤)

$= \frac{1}{2}$ [د(−٢) + د(٤)] × (٤+٢)

$= \frac{1}{2}$ [صفر + $\frac{1}{3}$] × ٦ = ١

∴ د(س) دالة كثافة إحتمالية

② ل (٠ < س < ٢)

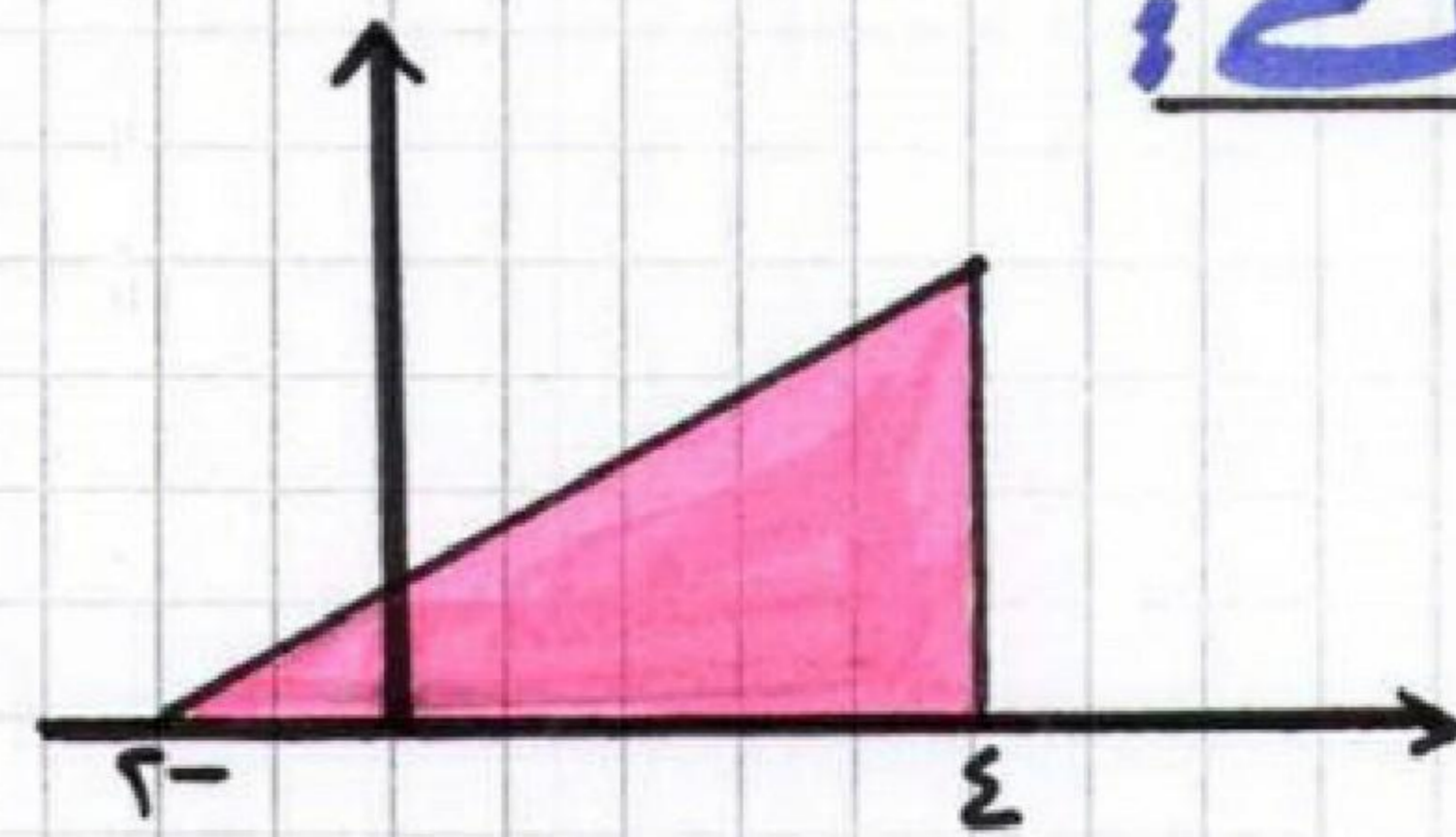
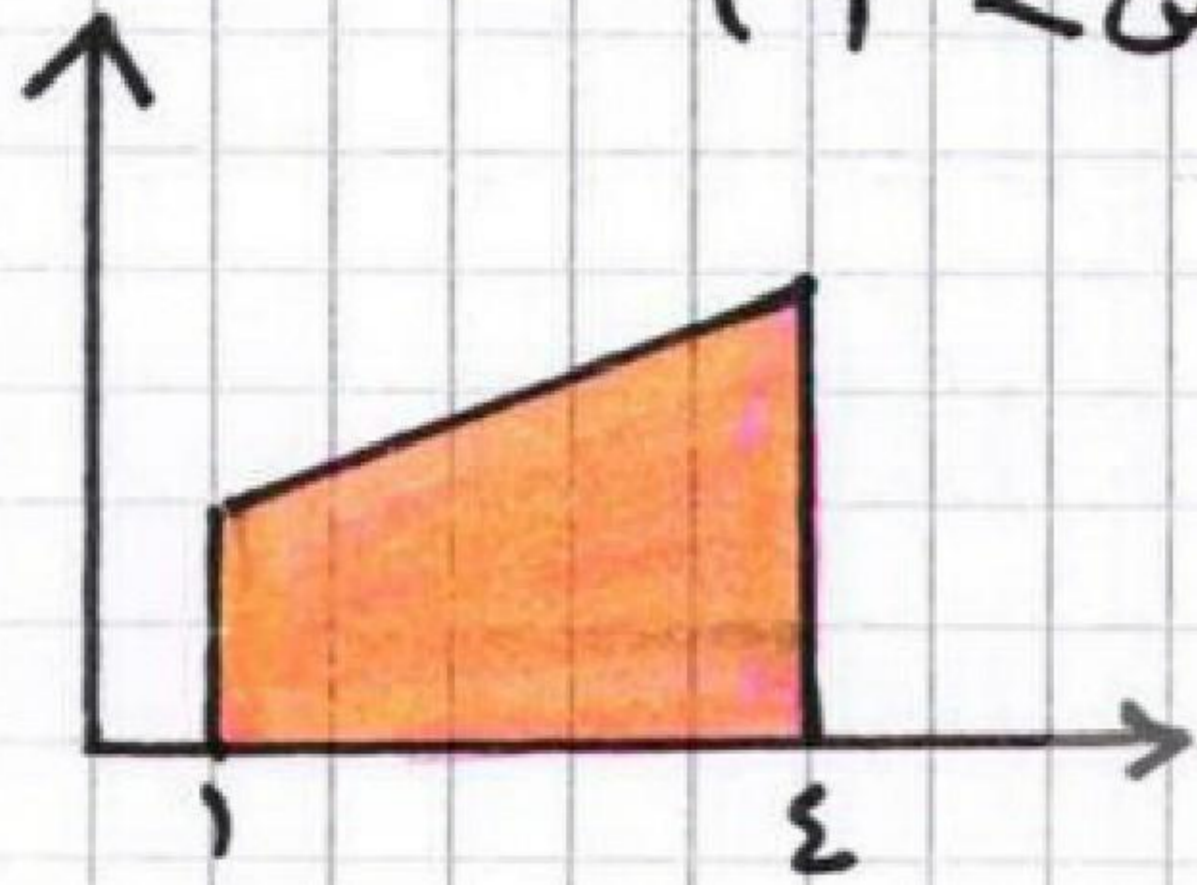
د(٠) = $\frac{1}{9}$ ، د(٢) = $\frac{2}{9}$

$= \frac{1}{2}$ [د(٠) + د(٢)] × (٢−٠)

$= \frac{1}{2}$ [$\frac{1}{9}$ + $\frac{2}{9}$] × ٢ = $\frac{1}{3}$

③ ل(س > ٢) = ل (٢ < س < ٤)

$= \frac{1}{2}$ [د(٢) + د(٤)] (٤−٢)

$= \frac{1}{2}$ [$\frac{4}{18}$ + $\frac{6}{18}$] × ٢ = $\frac{10}{18}$ = $\frac{5}{9}$

مثال: اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ك}{٢٤} & ، \quad ١ < س < ٤ \\ صفر & ، \quad فيما عدا ذلك \end{cases}$$

① أوجد قيمة ك

② أوجد ل(س > ٣)

الحل: ①

$د(١) = \frac{٢ + ك}{٢٤}$ ، $د(٤) = \frac{٨ + ك}{٢٤}$

$\because$ ل (١ < س < ٤) = ١

$\therefore \frac{١}{٢} [د(١) + د(٤)] (٤ - ١) = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \left[\frac{٢ + ك}{٢٤} + \frac{٨ + ك}{٢٤} \right] \times ٣ = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \times \frac{١٠ + ٢ك}{٢٤} \times ٣ = ١ \Leftarrow ٢ك = ٦ \Leftarrow$ **ك = ٣**

② ل(س > ٣) = ل(٣ < س < ٤)

$= \frac{١}{٢} [د(٣) + د(٤)] (٤ - ٣) = \frac{١}{٢} \left[\frac{٩}{٢٤} + \frac{١١}{٢٤} \right] \times ١ = \frac{٥}{١٢}$

مثال: اذا كان س متغيراً عشوائياً ودالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + م}{١٨} & ، \quad ٢ < س < ٥ \\ صفر & ، \quad فيما عدا ذلك \end{cases}$$

① أوجد قيمة م ؟

② أوجد ل(س > ٣) ؟

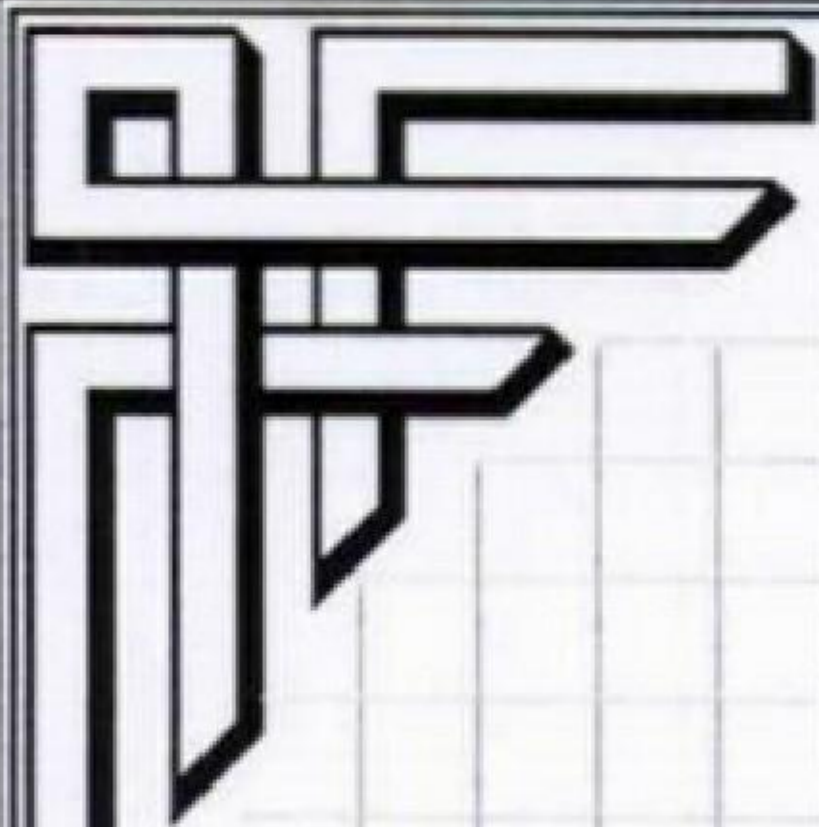
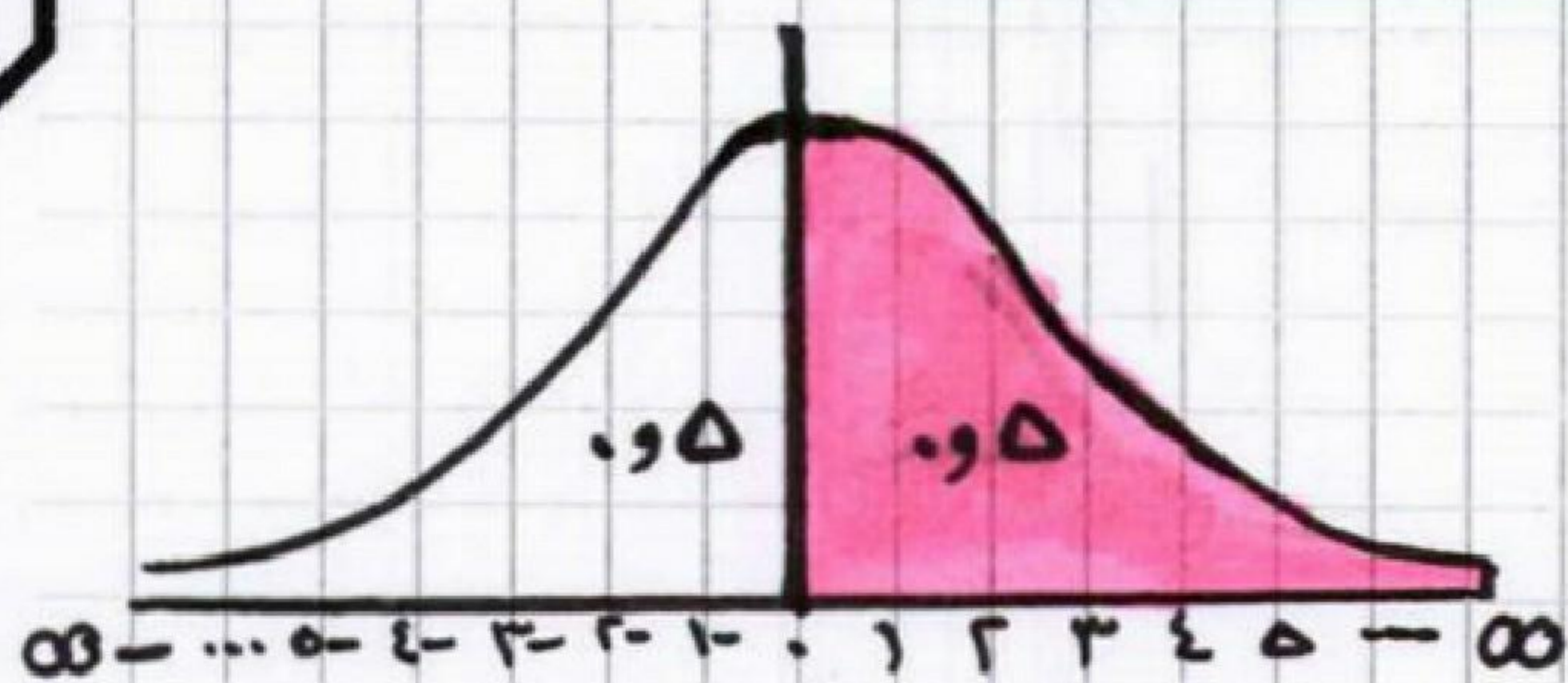
الحل:

الوحدة الرابعة

التوزيع الطبيعي

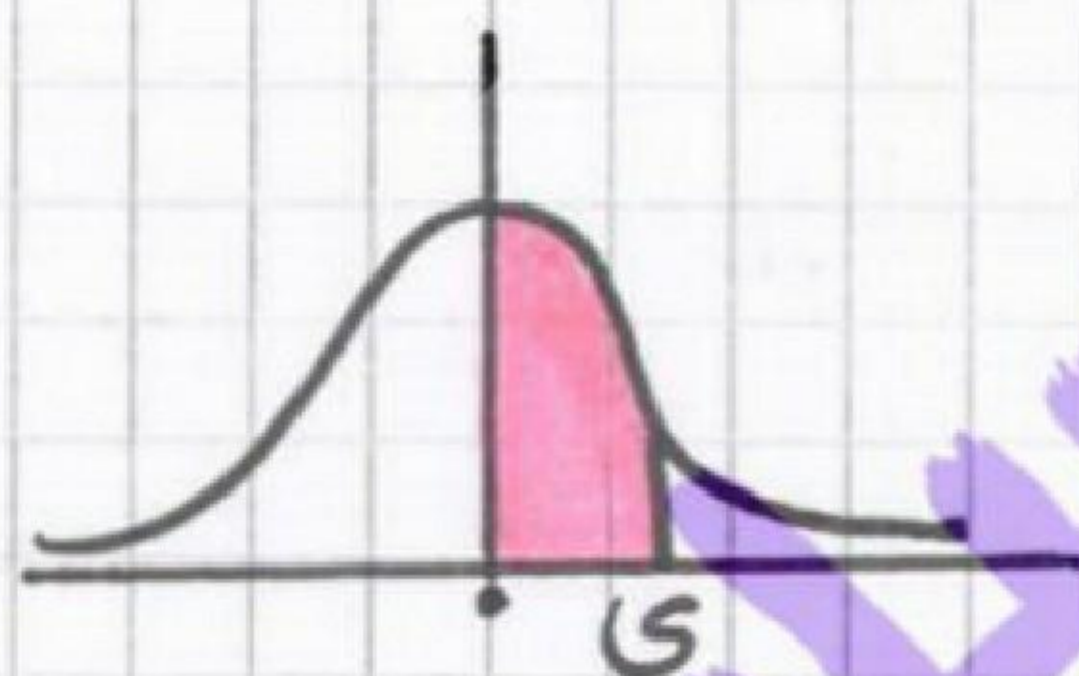
بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي المعياري (ص):

١) المنحنى يقع أعلى محور السينات

٢) متماثل حول محور الصادات

٣) طرفي المنحنى يمتدان إلى ما لانهاية دون أن يلتقي بمحور السينات

٤) مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوقه = ١

٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسي يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقي إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥

٦) ل(ص ≥ ٠) = ل(ص ≤ ٠) = ٠,٥

٧) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = مساحة المنطقة المظللة

حيث ى عدد موجب نحسبها من الجدول مباشرة

ملاحظات:

ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)
= ٠,١٥٥٤

ل(ص ≥ ١,٤)
= ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)
= ٠,٥ − ٠,٤١٩٢
= ٠,٠٨٠٨

ل(−٠,٤ ≤ ص ≤ ٠)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)
= ٠,١٥٥٤

ل(−١,٦٢ ≤ ص ≤ ٠,٤٤)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٦٢)
+ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤)
= ٠,٤٤٧٤ + ٠,١٧٠٠ = ٠,٦١٧٤

ل(−١,٤ ≤ ص ≤ ١,٤)
= ٢ × ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)
= ٢ × ٠,٤١٩٢
= ٠,٨٣٨٤

ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١)
− ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٨)
= ٠,٤٨٢١ − ٠,١٣٣١ = ٠,٢٩٧٧

مُراجعات ليلة الامتحان

① أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س، ص محدداً نوعه :

$\sum$ س = ٢٨ ، $\sum$ ص = ١٦٧ ،

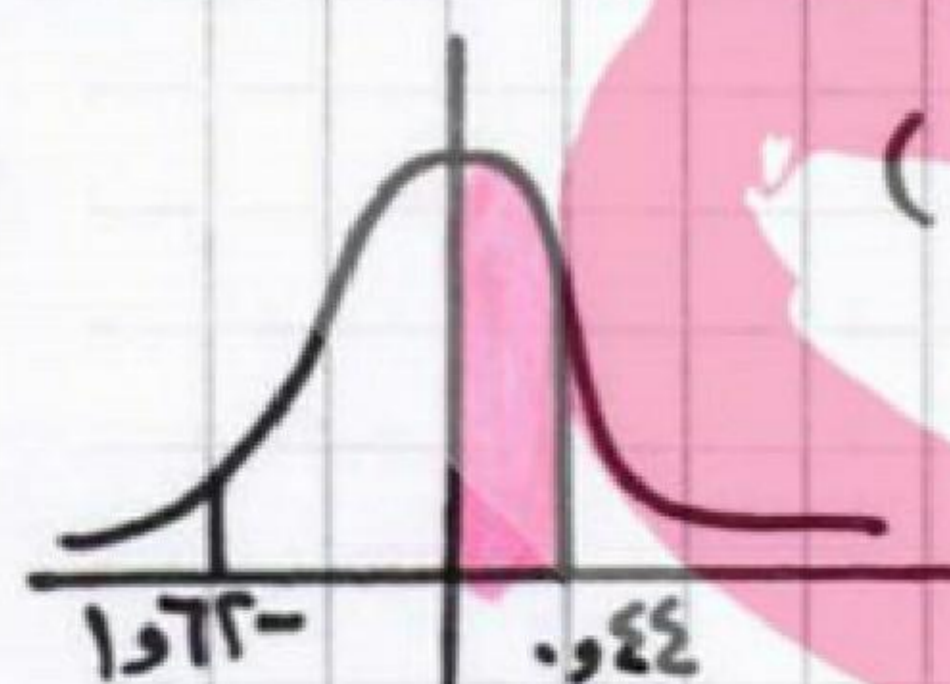
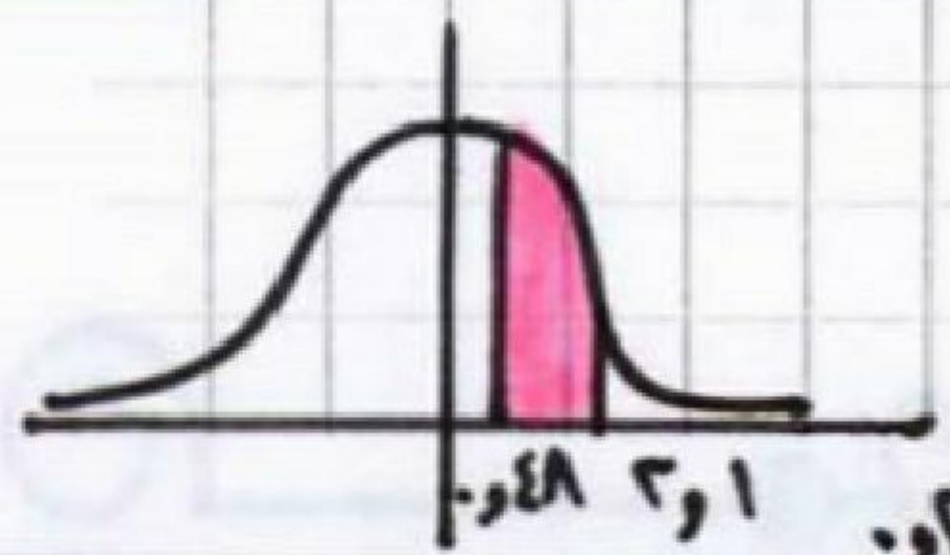
$\sum$ س ص = ٨٤٩ ، $\sum$ ص^2 = ٥١٧٩ ، ن = ٧

$\sum$ س^2 = ١٤١

الحل

$$ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

$$= \frac{٨٤٩ \times ٧ - (١٦٧ \times ٢٨)}{\sqrt{١٤١ \times ٧ - (٢٨)^2} \sqrt{٥١٧٩ \times ٧ - (١٦٧)^2}}$$

$\simeq$ ٠٫٩٧ (طردي قوي)

② من بيانات الجدول احسب معامل الارتباط الخطي بين س، ص وحدد نوعه ؟

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣٦	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

الحل

③ احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه ؟

س	٤٥	٣٥	٣٢	٤٠	٥٠	٣٢
ص	٣٨	٣٥	٤٠	٢٨	٢٢	٤٤

الحل

④ احسب معامل الارتباط لسبيرمان بين س، ص ؟ وحدد نوعه ؟

س	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جداً
ص	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	مقبول

الحل

④ اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي بالجدول :

$س_ر$	-١	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	٣,٠	١,٠	١,٠	ك	٢,٠

أوجد (١) قيمة ك

(٢) التوقع (المتوسط)

الحل

$\because \sum د(س_ر) = ١$

$\therefore ٣,٠ + ١,٠ + ١,٠ + ك + ٢,٠ = ١$

$\therefore ك = ٣,٠$

ثانياً من الجدول

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر . د(س_ر)$
-١	٣,٠	-٣,٠
٠	١,٠	٠
١	١,٠	١,٠
٢	٣,٠	٦,٠
٣	٢,٠	٦,٠
مج		١

$م = \sum س_ر . د(س_ر)$

$= ١$

$\therefore م = ١$

⑤ اذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه {-٢، -١، ٠، ١، ٢} وكان

$ل(س = ر) = \frac{م + س}{١٥}$

فأوجد :

(١) قيمة م (٢) الانحراف المعياري

الحل

⑥ اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{٨} & ١ \leq س \leq ٥ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

(أ) اثبت أن د(س) دالة كثافة احتمالية ؟

(ب) احسب ل (٢ < س < ٣)

الحل

د(١) = ٠ ، د(٥) = $\frac{١}{٢}$ ، د(٢) = $\frac{١}{٨}$

، د(٣) = $\frac{١}{٤}$

$\because$ ل (١ ≤ س ≤ ٥)

$= \frac{١}{٢} [د(١) + د(٥)] (٥ - ١)$

$= \frac{١}{٢} [٠ + \frac{١}{٢}] \times ٤ = ١$

$\therefore$ د(س) دالة احتمالية #

$\because$ ل (٢ < س < ٣)

$= \frac{١}{٢} [د(٢) + د(٣)] (٣ - ٢)$

$= \frac{٣}{١٦}$

⑦ اذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً لدالة كثافة احتمالية له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٣س + ٢}{٢٧} & ، ١ < س < ٤ \\ ٠ & ، فيما عدا ذلك \end{cases}$$

فأوجد (١) م (٢) ل(س > ٣) ؟

الحل

(٨) اذا كان ص متغير طبيعي معياري أوجد

(١) ل (ص ≥ -٠٫٨٤)

الحل

= ٠٫٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠٫٨٤)

= ٠٫٥ + ٠٫٢٠٠٥

= ٠٫٧٠٠٥

(٢) ل (-١٫٢٥ ≤ ص ≤ ٠٫٧٢)

الحل

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١٫٢٥)

+ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠٫٧٢)

= ٠٫٣٩٤٤ + ٠٫٢٦٤٢

= ٠٫٦٥٨٦

(٩) اذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ = ١٠ وانحرافه المعياري σ = ٢٫٥ فأوجد كلاً من:

(١) ل (ص ≥ ١٢٫٥)

(٢) اذا كان ل (ص ≥ ك) = ٠٫١٠٥٦ فأوجد قيمة ك ؟

الحل

(١٠) اذا كانت أجور ٥٠٠ عامل تتبع توزيع طبيعي بمتوسط حسابي μ = ٧٥ جنيهاً وانحراف معياره σ = ١٠ أوجد:

(١) النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٨٠ جنيهاً ؟

(٢) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهاً ؟

الحل

(١١) اذا كانت درجات بعض الطلاب هي متغير عشوائي متوسطه ٤٤ وانحرافه σ حيث حصل ٦٦٫٢٢ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة فأوجد σ ؟

الحل

(١٢) اختر الإجابة الصحيحة:

(١) أقوى معامل ارتباط عكسي فيما يلي هو .....

−٠,٦ ، **−٠,٩** ، −٠,١ ، صفر

(٢) إذا كان أ ⊂ ب وكان ل(أ') = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$ فإن ل(أ/ب) = ...

$\frac{١}{٥}$ ، **$\frac{٣}{٥}$** ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢٠}$

(٣) إذا كان ل(أ/ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$ فإن ل(أ∩ب) = ...

$\frac{٤}{٢٥}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣٥}{٣٦}$ ، $\frac{١٦}{٢٥}$

(٤) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة وكان أ ⊂ ب فإن ل(أ/ب) = ...

ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ − ب) ، **ل(ف)**

(٥) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب') = ٠,٦

فإن ل(أ ∪ ب) = ...

٠,٤ ، **٠,٧** ، ٠,٨ ، ١,٣

(٦) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(أ∩ب) = ٠,٤٥

فإن ل(ب') = ...

٠,٩ ، **٠,١** ، ٠,١٥ ، ٠,٤

(٧) إذا كانت معادلة انحدار ص على س هي ص = ٠,٦ س + ٣ وكانت قيمة ص الجدولية عند س = ٥ هي ٦,٤ فإن مقدار الخطأ في قيمة ص = ...

٠,٨ ، **٠,٦** ، ٠,٤ ، ٠,١

مع تحياتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم

(١٣) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت:

د(س) = { (س - ١) / ٨ ، ١ ≤ س ≤ ٥
صفر ، فيما عدا ذلك }

أثبت أن د(س) دالة كثافة إحتمالية ثم احسب ل (٢ < س < ٣) ؟

---

(١٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً وكانت:

د(س) = { ١/١٦ (س + ٢) ، ٠ ≤ س ≤ ٤
صفر ، فيما عدا ذلك }

أحسب ل(س < ٢) ثم إذا كان ل (ك < س < ك + ٢) = ١/٢ فما قيمة ك؟

---

(١٥) اختر:

(١) اذا كانت د(س) = { ك س ، ٠ ≤ س ≤ ٤
صفر ، فيما عدا ذلك }
دالة كثافة لمتغير عشوائى متصل فإن ك = ...

١/١٢ ، ١/٨ ، ١/٦ ، ١/٢

(٢) اذا كانت د(س) = { ١/٥٠ (١٧ - ٢س) ، ١ ≤ س ≤ ٦
صفر ، فيما عدا ذلك }
فإن: ل (٣ < س ≤ ٥) = ...

٧/٢٥ ، ١١/٢٥ ، ٠٫٦ ، ١

(٣) إذا كان ل(أ/ب) = ١/٣ ، ل(ب) = ١٢/٢٥
فإن ل(أ ∩ ب) = ...

٤/٢٥ ، ١/٤ ، ٢٥/٣٦ ، ١٦/٢٥

(٤) إذا كانت معادلة خط الإنحدار:
ص = ٦ + ٠٫٢٥ س فإن قيمة ص المتوقعة عند س = ١٠ هى ....

٣٫٥ ، ٨٫٥ ، ٦٫٢٥ ، ٦٤٫٥

(٥) إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن الإرتباط بين س ، ص

طردياً ، عكسياً ، تاماً ، منعدماً